

**Th 3:** L'enveloppe convexe de  $\mathcal{A}$  est l'ensemble des **barycentres à coefficients positifs** de points de  $\mathcal{A}$ .

**Prop 3:** Une partie non vide de  $E$  est convexe ssi elle est stable par barycentration à coefficients positifs.

## I. Caractérisation de l'enveloppe convexe.

**Th 3:** L'enveloppe convexe de  $\mathcal{A}$  est l'ensemble des **barycentres à coefficients positifs** de points de  $\mathcal{A}$ .

Notons  $B$  l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de points de  $\mathcal{A}$ .

- En particulier,  $B$  contient  $\mathcal{A}$  (pour chaque point de  $\mathcal{A}$ , il suffit d'affecter ce point du coefficient 1 et les autres points de  $\mathcal{A}$  du coefficient 0).

- Montrons que  $B$  est convexe.

Soient  $M = \sum_{i \in I} d_i A_i \in B$ , avec  $i \in I$ ,  $A_i \in \mathcal{A}$ ,  $d_i \in \mathbb{R}_+$ , et  $\sum_{i \in I} d_i = 1$ .  
 $N = \sum_{j \in J} p_j B_j \in B$ , avec  $j \in J$ ,  $B_j \in \mathcal{A}$ ,  $p_j \in \mathbb{R}_+$  et  $\sum_{j \in J} p_j = 1$ .

où  $I$  et  $J$  sont des sous-ensembles non vides de l'ensemble  $\llbracket 1, n \rrbracket$  des indices de  $\mathcal{A}$ . Quitte à introduire des coefficients supplémentaires  $d_i$  et  $p_j$  nuls, on peut supposer que  $I = J$ , et donc que  $\{A_i\}_{i \in I} = \{B_j\}_{j \in J}$ .

Tout point  $P$  du segment  $[MN]$  s'écrit :

$$P = tM + (1-t)N, \text{ où } t \in [0, 1]$$

$$P = t \sum_{i \in I} d_i A_i + (1-t) \sum_{i \in I} p_i A_i$$

$$= \sum_{i \in I} \underbrace{(t d_i + (1-t) p_i)}_{\text{positif car somme de positifs}} A_i$$

Ainsi,  $P$  est un barycentre des  $A_i$  (points de  $\mathcal{A}$ ), à coefficients positifs.  
 Donc  $P \in B$ .

II Comme ceci est vrai pour tous  $M, N \in B$  et tout  $P \in [MN]$ ,  $B$  est convexe.

- Soit  $\mathcal{C}$  un convexe contenant  $\mathcal{A}$ , montrons que  $B \subset \mathcal{C}$ .

Montrons par récurrence sur  $k$  la propriété :

$H(k)$  : « Tout barycentre à coefficients positifs de moins de  $k$  points de  $\mathcal{A}$  appartient à  $\mathcal{C}$  ».

Les propriétés  $H(1)$  et  $H(2)$  sont vérifiées, la première car  $\mathcal{C}$  contient  $\mathcal{A}$ , et la seconde car  $\mathcal{A}$  est convexe et donc « contient ses segments ».

Supposons, pour un certain  $k \geq 0$ ,  $H(k)$  vraie, et montrons  $H(k+1)$ .  
 Soit  $\Pi = \sum_{i=1}^{k+1} d_i A_i$ , avec  $\sum_{i=1}^{k+1} d_i = 1$ ,  $d_i \geq 0$  et  $A_i \in \mathcal{A}$  pour tout  $i \in I$ .  
 - Si l'un des  $d_i$  est nul, alors  $\Pi \in \mathcal{C}$  d'après  $H(k)$ .  
 - Si tous les  $d_i$  sont strictement positifs, alors  $\sum_{i=1}^k d_i < 1$ ,  
 et par associativité des barycentres,  $\Pi = \text{bary} \left( g \left( \sum_{i=1}^k d_i \right), A_{k+1}(d_{k+1}) \right)$ ,  
 où  $g$  est le barycentre de  $A_1(d_1), \dots, A_k(d_k)$ .  
 D'après  $H(k)$ ,  $g \in \mathcal{C}$ , et comme  $A_{k+1} \in \mathcal{A} \subset \mathcal{C}$ ,  
 puisque  $\mathcal{C}$  est convexe on a  $\Pi \in \mathcal{C}$ , ce qui achève la  
 démonstration par récurrence.

|| • Finalement,  $B$  est le plus petit (par l'inclusion) convexe  
 contenant  $\mathcal{A}$ , c'est l'enveloppe convexe de  $\mathcal{A}$ .

## II. Caractérisation d'une partie convexe.

**Prop 3:** Une partie non vide de  $E$  est convexe ssi elle est stable par barycentration à coefficients positifs.

Soit  $\mathcal{C}$  une partie de  $E$ . Soit  $B$  l'ensemble de ses barycentres à coefficients positifs.

On a:  $\mathcal{C}$  convexe  $\Leftrightarrow \mathcal{C} = \underbrace{\text{Conv}(\mathcal{C})}_{\text{enveloppe convexe de } \mathcal{C}}$

$\Leftrightarrow \text{Conv}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$

$\Leftrightarrow B \subset \mathcal{C}$